Orígenes y desarrollo del concepto de derivada. La invención del Cálculo

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Septiembre de 2021

Índice

1. Orígenes y desarrollo del concepto de derivada. La invención del Cálculo

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales, como ya hemos visto en capítulos anteriores, tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada es relativamente reciente. No obstante, técnicas en las que podemos reconocer el uso, más o menos explícito, de derivadas, se han venido usando desde el siglo XVII, incluso antes de que Newton y Leibniz, en el último tercio de dicho siglo, las formularan en términos de *fluxiones* y de *cocientes diferenciales* respectivamente. Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX. Todo este proceso lo resume la historiadora de las matemáticas Judith V. Grabiner en una frase feliz [2]: *"Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida"*.

En lo que sigue vamos a repasar muy someramente este proceso. Además de la referencia antes citada, he seguido de cerca los trabajos de Kirsti Andersen [1], Israel Kleiner [4] y González Urbaneja [3].

1.1. Las matemáticas en Europa en el siglo XVII

Es conocido que la carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, lo que condujo al desarrollo de un álgebra geométrica que fue usada por Euclides, Arquímedes y Apolonio para realizar sus cálculos. La consecuencia de esta actitud fue que durante casi 2000 años, en Europa, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

Ya hemos comentado en capítulos anteriores cómo la herencia matemática griega pasó a los árabes de donde regresó a Europa ya en el siglo XII. En estos siglos se desarrolló sobre todo la aritmética y los comienzos del álgebra. Pero hay que esperar hasta el siglo XVII para que en Europa empiecen a notarse cambios significativos en la forma de hacer matemáticas y a lograr avances que abren nuevas perspectivas. Las características principales de las matemáticas en el siglo XVII en Europa son las siguientes.

- Asimilación y síntesis de la tradición clásica griega y del legado árabe.
- Se sigue admirando el rigor demostrativo euclidiano pero se buscan procedimientos heurísticos. Se impone la idea de "primero descubrir y luego demostrar".

- Progresos decisivos en el simbolismo algebraico (Viéte, Stevin). Concepto de cantidad abstracta.
- Invención de la geometría analítica por Fermat y Descartes.
- Multitud de nuevas curvas, muchas de ellas curvas mecánicas, como la cicloide, que llevan consigo problemas de tangentes, cuadraturas, centros de gravedad, máximos y mínimos, rectificaciones.
- Invención de métodos infinitesimales para tratar problemas de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos. Libre uso del infinito.
- Inicios del estudio matemático del movimiento. Concepto de cantidad variable.
- La Revolución Científica protagonizada por Copérnico, Galileo y Kepler. Mecanicismo.
- Invención de los logaritmos por Neper. Progresos de la astronomía y de la trigonometría. Desarrollo de la óptica.
- Creación de instituciones científicas como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París y comienzo de las publicaciones científicas periódicas.

En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica, con frecuencia dichas técnicas no se justifican sino que, simplemente, se comprueba que proporcionan soluciones correctas. Los matemáticos de la época se interesaban por problemas de óptica, por ejemplo, determinar la forma de una lente que hace que todos los rayos luminosos paralelos entre sí o los que parten de un único foco, después de atravesar la lente, converjan en un único punto. Problemas físicos, como la determinación de la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que cae al mismo tiempo hacia ese centro con aceleración constante. Otros problemas consistían en el cálculo de tangentes y de valores máximos o mínimos. Estaban, además, los problemas relacionados con la integral (cuadraturas, áreas de superficies, centros de gravedad, rectificaciones de curvas,...) que consideraremos en el capítulo correspondiente.

1.2. Cálculo de tangentes y de valores extremos

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes o la concoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad.

Con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Los matemáticos del siglo XVII se vieron en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes. Vamos a considerar algunas de las aportaciones más significativas.

1.2.1. El método de máximos y mínimos de Fermat

En 1637 Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximan et minimam* ("Método para la investigación de máximos y mínimos"). En ella se establecía el primer procedimiento general conocido para calcular máximos y mínimos. Fermat se expresa como sigue.

> Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:
>
> **1.** Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
> **2.** Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.
> **3.** Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a+e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.
> **4.** Se "*adigualará*" para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
> **5.** Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.
> **6.** Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
> **7.** Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
> **8.** La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Fermat ilustraba su método hallando el punto E de un segmento AC que hace máxima el área del rectángulo $AE.EC$.

Pongamos $AC = b$.

1. Sea a uno de los segmentos, el otro será $b-a$.
2. El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba-a^2$.
3. Sea ahora $a+e$ el primer segmento de b, el segundo segmento será $b-a-e$, y el producto de segmentos: $ba-a^2+be-2ae-e^2$.

4. Se debe “*adigualar*” al precedente: $ba-a^2+be-2ae-e^2 \sim ba-a^2$.
5. Suprimiendo términos comunes: $be \sim 2ae+e^2$.
6. Dividiendo todos los términos por e: $b \sim 2a+e$.
7. Se suprime la e: $b=2a$.
8. Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b.

El recurso de hacer $e=0$ es equivalente a lo indicado en la instrucción 7 de Fermat. Esto era precisamente lo que se hacía al aplicar el método, a pesar de que antes era necesario dividir por e, lo que resultaba algo contradictorio.

Debemos observar que el método de Fermat da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. Es un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a=x$, $e=\triangle x$, y pongamos $f(x)=x(b-x)$.

1 – 5 $f(x+\triangle x)-f(x) \sim 0$.

6 $\dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \sim 0$.

7, 8 $\left(\dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\right)_{\triangle x=0}=0$

Para funciones derivables podemos interpretar todo esto como que el valor de x que hace máximo o mínimo a $f(x)$ es la solución de resolver la ecuación

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=0$$

Sin embargo, esto significa extrapolar demasiado el contenido estricto del método. Lo que estamos haciendo es interpretar con nuestra mirado de hoy lo que hizo Fermat. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y por eso habla de “cantidad máxima o mínima”, no de una función que alcance un máximo o un mínimo. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente. Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Fermat no decía nada acerca de que e fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Además, la condición 6 no tiene sentido en esta interpretación. Los problemas a los que Fermat aplicó su método son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

1.2.2. El método de las tangentes de Fermat

En la misma memoria antes referida, Fermat, determina la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos. Su razonamiento es como sigue.

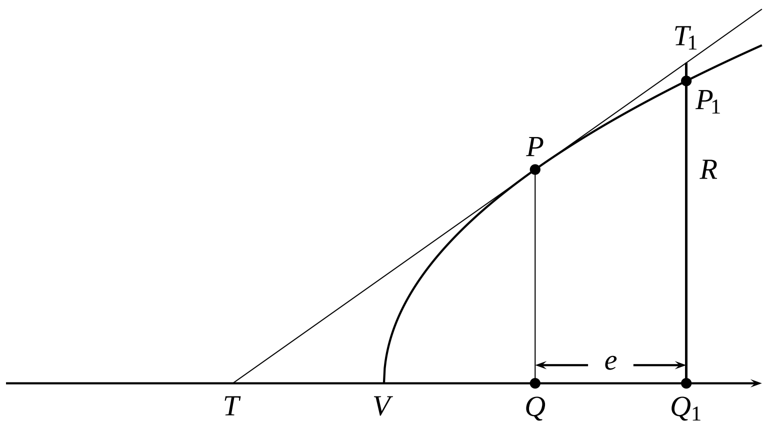

Figura 1. Cálculo de la subtangente

En la figura (2), el segmento TQ es la subtangente a la parábola en un punto dado P. El vértice de la parábola es V. Teniendo en cuenta que los triángulos TQP y TQ_1P_1 son semejantes, resulta

$$\frac{T_1Q_1}{PQ} = \frac{TQ_1}{TQ} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta ahora la propiedad de la parábola

$$\frac{VQ_1}{VQ} = \frac{P_1Q_1^2}{PQ^2}$$

y que $P_1Q_1 < T_1Q_1$, deducimos que:

$$\frac{VQ_1}{VQ} < \frac{TQ_1^2}{TQ^2} \tag{2}$$

Pongamos ahora $VQ = a$, que es la abscisa de la parábola en P, conocida porque se conoce P. Hagamos también $TQ = x$ que es la subtangente que queremos calcular, y $QQ_1 = e$. La igualdad (2) se expresa por:

$$\frac{a+e}{a} < \frac{(x+e)^2}{x^2} \Longleftrightarrow ax^2 + ex^2 < ax^2 + 2aex + ae^2$$

Fermat aplica su método de máximos y mínimos y sustituye esta desigualdad por la *adigualdad*

$$ax^2 + ex^2 \sim ax^2 + 2aex + ae^2$$

Cancelando términos y dividiendo por e obtenemos

$$x^2 \sim 2ax + ae$$

Eliminando ahora el término que queda en e, igualando y simplificando por x, se obtienes que $x = 2a$, resultado ya conocido de la Antigüedad y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

Realmente no se entiende bien la razón de por qué Fermat usa su método de máximos y mínimos para calcular tangentes y Descartes hizo una dura crítica de esta forma de proceder. Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló, en una memoria de 1638, un procedimiento bastante general para calcular tangentes que, con notación actual, podemos resumir como sigue. Sea $P = (x,y)$ un punto de una curva $f(x,y) = 0$ y sea $P_1 = (x+e, y_1)$ otro punto de la curva próximo a P como en la figura (1). Llamemos $b = TQ$, la subtangente en P. Teniendo en cuenta que $PQ = y$, la igualdad (1) se escribe como

$$T_1Q_1 = \frac{y(b+e)}{b}$$

Como T_1Q_1 es casi igual a $y_1 = P_1Q_1$, Fermat escribe

$$f\left(x+e, \frac{y(b+e)}{b}\right) \sim 0$$

y a esta *adigualdad* le aplica su método para máximos y mínimos. Es fácil ver que ello conducirá a una expresión para b dada por

$$b = -\frac{y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

Que, usando que la tangente viene dada por y/b, podemos escribir, viendo y como función (implícita) de x, en la forma familiar

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

La idea de "*adigualdad*" en Fermat puede interpretarse algo así como "cantidades infinitamente próximas". De alguna forma Fermat está considerando cantidades infinitesimales.

Es tentador expresar en términos actuales las ideas de Fermat para calcular tangentes. Esencialmente, dado un punto $P = (a, f(a))$ en una curva $y = f(x)$, se trata de calcular la pendiente de la curva en P. Sea QQ_1 un incremento de TQ en una cantidad E. Ya que los triángulos TQP y PRT_1 son semejantes, se tiene

$$\frac{PQ}{TQ} = \frac{T_1R}{E}$$

Pero, dice Fermat, T_1R es casi igual a P_1R; por tanto tenemos la *adigualdad*

$$\frac{PQ}{TQ} \sim \frac{P_1Q_1 - QP}{E}$$

Poniendo $PQ = f(a)$, la igualdad anterior puede escribirse como:

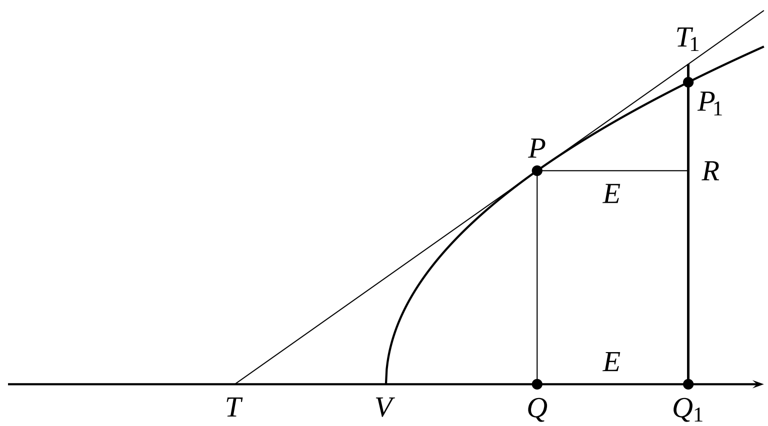

Figura 2. Cálculo de la tangente

$$\frac{f(a)}{TQ} \sim \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Ahora, dice Fermat, se cancelan términos iguales en $f(a+E) - f(a)$, se divide por E y finalmente, se ignoran los términos que aún contengan E (lo que equivale a hacer $E = 0$), y el resultado es la pendiente de la tangente en P. Está claro que el procedimiento que indica Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Naturalmente, a esta interpretación se le pueden hacer las mismas observaciones que hicimos a la interpretación análoga del método para máximos y mínimos.

Ejemplo.

Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $a = 2$. Entonces $f(2) = 3$. Pongamos $c = TQ$ la longitud de la subtangente. Tenemos la *adigualdad*:

$$\frac{3}{c} = \frac{f(2+E) - f(2)}{E} = \frac{2E + E^2}{E} = 2 + E$$

Haciendo $E = 0$ se obtiene $3/c = 2$, por la que la subtangente es $c = 3/2$ y el valor de la pendiente de la tangente es $3/c = 2$ que, efectivamente es igual a la derivada de f en $x = 2$.

1.2.3. El método de Roberval y de Torricelli para las tangentes

En 1630 Roberval y Torricelli descubrieron independientemente un método para calcular tangentes por medio de consideraciones cinemáticas. Este método se apoya en dos ideas básicas: la primera es la de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y la segunda es la de considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se puede hallar mediante la ley del paralelogramo. Ya en la antigüedad, Arquímedes había usado un método análogo para trazar la tangente a su espiral.

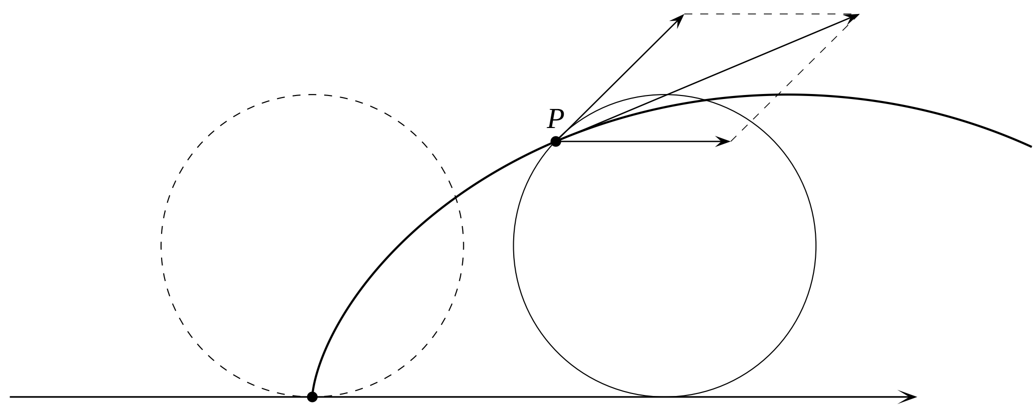

Figura 3. Tangente a la cicloide

Consideremos una cicloide, esto es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar. El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto P se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en P y un vector horizontal en P, y ambos vectores tienen igual módulo.

Naturalmente, esta idea de la tangente solamente podía aplicarse a curvas mecánicas, si bien tenía la virtud de relacionar geometría y dinámica siguiendo las ideas de Galileo.

1.2.4. El triángulo diferencial de Barrow

Isaac Barrow (1630 - 1677) también dio un método para calcular tangentes. Barrow era un admirador de los geómetras antiguos y editó las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones Opticae* (1669) y *Lectiones Geometricae* (1670) en la edición de las cuales colaboró Newton. El tratado *Lectiones Geometricae* se considera una de las principales aportaciones al Cálculo. En él Barrow quiso hacer una puesta al día de todos los últimos descubrimientos, principalmente de problemas de tangentes y cuadraturas. Barrow hace un tratamiento detallado de todos estos problemas incluyendo conceptos como tiempo y movimiento y usando métodos infinitesimales y métodos de indivisibles.

Una de las herramientas a las que saca gran partido es al triángulo característico o triángulo diferencial.

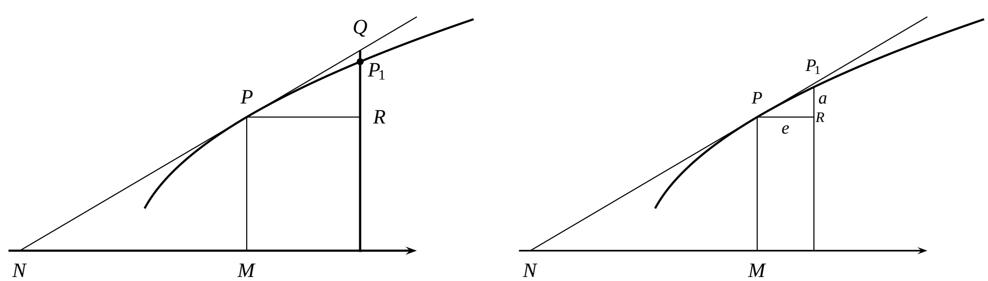

Figura 4. Triángulo diferencial

Partiendo del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, como este triángulo es semejante al PNM, resulta que la pendiente de la tangente PM/MN es igual a QR/PR. Barrow afirma que cuando el arco PP_1 es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento PQ de la tangente en P. El triángulo PRP_1 de la figura de la derecha, en el cual PP_1 es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el *triángulo característico o diferencial*. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.

En la Lección X de *Lectiones*, Barrow calcula la tangente a una curva, dada por una ecuación polinómica $f(x,y) = 0$, en un punto de la misma $P = (x,y)$ de la forma siguiente. Pongamos $P_1 = (x+e, y+a)$ un punto de la curva próximo a P y sustituyamos estas coordenadas en la ecuación $f(x,y) = 0$. En palabras de Barrow:

> Rechacemos todos los términos en los que no hay a o e (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva); rechacemos todos los términos en los que a o e están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto).

Después de estas operaciones se puede calcular el cociente a/e que es la pendiente de la curva en el punto P.

Ejemplo.

Consideremos la curva $x^3+y^3=r^3$ y sigamos el método de Barrow para calcular su pendiente en un punto $P=(x,y)$ de la misma. Como el punto $P_1=(x+e,y+a)$ está en la curva se tiene:

$$(x+e)^3+(y+a)^3=r^3$$

Esto es

$$x^3+3x^2e+3xe^2+e^3+y^3+3y^2a+3ya^2+a^3=r^3$$

Simplificamos usando que $x^3+y^3=r^3$ y eliminando las potencias de a y e de grado mayor que uno, y obtenemos

$$3x^2e+3y^2a=0$$

de donde resulta la pendiente:

$$\frac{a}{e}=-\frac{x^2}{y^2}$$

Observa que este procedimiento equivale a quedarse con la aproximación lineal de la función en el punto P y eso es como reemplazar el triángulo PRP_1 en la figura de la izquierda por el triángulo diferencial.

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente a/e. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

1.3. Los inventores del Cálculo

El método de Fermat para el cálculo de valores máximos o mínimos y la técnica para el cálculo de tangentes que, esencialmente, consistía en calcular el cociente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

realizando las operaciones algebraicas necesarias para desarrollar y simplificar el numerador y después dividir por h para, finalmente, hacer $h=0$, fueron aplicados en una gran variedad de situaciones. La relación entre ambos tipos de problemas acabó siendo bien entendida: los valores extremos se obtenían en los puntos donde la pendiente de la tangente se anulaba. Así mismo, de la multitud de casos particulares estudiados, emergieron ciertas regularidades que llevaron a reformular las citadas técnicas de forma más general. De esta forma, aunque en el 1660 no se disponía de un concepto general de derivada ni se conocía la relación crucial entre problemas de tangentes y de áreas, se habían desarrollado bastantes métodos eficaces, aunque no rigurosos, para resolver muchos tipos de problemas de cálculo. Solamente faltaba realizar la gran síntesis de todo el trabajo realizado desde 1630. Eso es lo que hicieron Newton y Leibniz.

La invención del Cálculo es uno de los grandes logros de la humanidad. El Cálculo se ha convertido en la *lingua franca* de todas las ciencias. Ha sido, y sigue siendo, una herramienta fundamental para la comprensión científica de la Naturaleza.

En el último tercio del siglo XVII, Newton (en 1664 - 1666) y Leibniz (en 1675), de forma independiente cada uno, inventaron el Cálculo. Esto quiere decir que:

- Unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, la gran variedad de técnicas diversas y de problemas que se abordaban con métodos particulares.
- Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de "cálculo" que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independientes de cualquier significado geométrico, que hacía fácil, casi automático, el uso de dichos conceptos generales.
- Reconocieron la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

1.4. Newton y el cálculo de fluxiones

Figura 5. Newton

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

Newton llamó a nuestra derivada una *fluxión* – una razón de cambio o flujo; Leibniz vio la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó el *cociente diferencial*. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados. A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años, había nacido el día de Navidad de 1642.

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow.

Una segunda presentación del Cálculo es la que realiza Newton en el libro *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, escrito hacia 1671 y que se publicó mucho después en 1736. Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama *fluentes*. Después se introducen las razones de cambio instantáneas de las fluentes, a las que llama *fluxiones*, que son las derivadas respecto al tiempo de las fluentes. Newton representaba a las primeras por letras $x, y, z, \dots$ y a las segundas por letras punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$. Los incrementos de las fluentes $x, y, z, \dots$, los representa por medio de las correspondientes fluxiones en la forma $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$, y los llama *momentos*, donde o es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. Newton desarrolló una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., a dos problemas fundamentales que pueden formularse tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

Problema 1 Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación de las fluxiones.

Problema 2 Dada la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado. Matemáticamente: determinar la relación entre las fluentes dada la relación entre las fluxiones.

Hay que notar que Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual de ese término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las fluentes del tipo $f(x, y, z, \dots) = 0$, donde f para él es una expresión analítica finita o infinita. Por tanto, el primer problema planteado puede verse como un problema de derivación implícita: supuesta conocida la expresión analítica que satisfacen las fluentes $f(x, y, z, \dots) = 0$, obtener la expresión analítica $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$ que satisfacen las fluxiones. Para este problema, Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cálculos necesarios. Por ejemplo, sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente, tenemos:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}ox + \dot{x}^2o^2) + \\ + a(xy + \dot{x}oy + \dot{y}ox + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}ox^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

Teniendo en cuenta ahora que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividiendo por o y despreciando los demás términos que contengan a o, resulta

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Esta es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en cualquier punto (x, y) de la misma, que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Como ya hemos indicado, Newton aplica los resultados sobre fluentes y fluxiones a la resolución de multitud de problemas. Por ejemplo, con respecto a los problemas de máximos y mínimos, escribe:

> Cuando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece: si creciera, eso probaría que era menor y que lo que sigue sería más grande que lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera. Así, calcúlese su fluxión como se ha explicado en el problema 1 e iguálese a cero.

De nuevo, Newton usa el teorema fundamental del cálculo para realizar cuadraturas. Escribe:

> Problema 9: Determinar el área de cualquier curva propuesta.
>
> La resolución del problema está basada en el establecimiento de la relación entre la cantidad fluente y su fluxión (problema 2).

Newton reduce la integración al proceso inverso del cálculo de fluxiones, esto es, al cálculo de primitivas.

El problema 2, es mucho más difícil que el problema 1, pues se trata de resolver una ecuación diferencial que puede ser muy general. Newton consideró varias posibilidades resolviendo algunos casos particulares. Para ello utilizó técnicas de cálculo de primitivas y de desarrollos en serie.

En *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama *razones primera y última de incrementos evanescentes*. De esa forma se refiere Newton a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero ("razón primera") o se anulan ("razón última"). Un ejemplo ayudará a entender el significado de estas ideas. En la introducción de la citada obra, Newton calcula la fluxión de x^n. Para ello, considera un incremento o de forma que x pasa a $x + o$. Entonces x^n se convierte en

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

Los incrementos de x y x^n, a saber,

$$o \quad \text{y} \quad nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

están entre sí en la misma razón que

$$1 \quad \text{a} \quad nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots$$

Dice Newton "dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a nx^{n-1}: por tanto, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x^n como $1 : nx^{n-1}$".

Hay distintas interpretaciones de las razones que llevaron a Newton a exponer su cálculo de una u otra forma. La más extendida es que su intención era conseguir una fundamentación rigurosa del mismo. La primera exposición, basada en el concepto de cantidad infinitesimal, entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia lógica de los que Newton era muy consciente. En sus propias palabras, su cálculo estaba *"concisamente explicado más que exactamente demostrado"*.

En *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1671), el concepto básico es el de cantidad en movimiento o que fluye continuamente en el tiempo. Las magnitudes están generadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales; la idea básica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. Quizás Newton pretendía de esta forma evitar el uso de "infinitesimales estáticos o geométricos", pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fluentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracción matemática análoga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todas las fluentes. Puede verse aquí un intento de Newton por evitar los problemas matemáticos del continuo (infinitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo físico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantánea de las fluentes, no le pareció preciso definirla.

En *Quadrature of Curves* (1676), Newton expresa su propósito de abandonar por completo el uso de cantidades infinitesimales. Manifiesta en este sentido que *"errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi"*, esto es, que en matemáticas ni siquiera los errores más pequeños pueden ser admitidos. Y eso es justamente lo que se hacía cuando se despreciaban en los cálculos cantidades infinitesimales. Seguidamente, enuncia su teoría de las *"razones primera y última de cantidades evanescentes"*. Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Pero estamos en el siglo XVII y se necesitarán casi 200 años para precisar matemáticamente el concepto de límite. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento.

> Por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes, la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen.

Newton tenía su particular idea de "límite".

> Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

La teoría de las razones últimas puede verse como una teoría cinemática de límites. Con esta teoría, Newton pretendía recuperar el rigor de la geometría de la Antigüedad.

> [. . .] investigar las razones primera y última de cantidades finitas, nacientes o evanescentes, está en armonía con la geometría de los antiguos; y me he esforzado en probar que, en el método de fluxiones, no es necesario introducir en la geometría cantidades infinitamente pequeñas.

Otros autores opinan que estos tres métodos empleados por Newton responden, más que a fundamentar con rigor su cálculo, a distintos propósitos. Así, la teoría de fluxiones proporciona métodos heurísticos de descubrimiento y algoritmos útiles para el calculo; la teoría de "razones primera y última" serviría al propósito de proporcionar demostraciones convincentes y el uso de los infinitésimos serviría para proporcionar atajos a las pruebas más rigurosas. Newton usó simultáneamente estas tres aproximaciones en la resolución de una gran variedad de problemas.

Newton realizó también contribuciones importantes en la teoría de ecuaciones, donde podemos destacar las "identidades de Newton" para la suma de las potencias de las raíces de una ecuación polinómica, y a la teoría de curvas, siendo notable su clasificación de las curvas de tercer grado.

> *Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.* Leibniz

Las tres obras consideradas, escritas entre 1666 y 1676, se publicaron ya en el siglo XVIII, por eso la primera noticia impresa de la teoría de fluxiones apareció, de forma bastante circunstancial, en la obra magna de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se hizo en 1687. Los *Principia* consta de tres libros escritos en el estilo tradicional a la manera de los *Elementos* de Euclides, y su lenguaje es principalmente el de la geometría sintética.

Los *Principia* están considerados como la obra científica más importante de todos los tiempos y una hazaña intelectual incomparable por sus logros y sus consecuencias. En dicha obra Newton estable los fundamentos de la mecánica y enuncia las tres célebres leyes del movimiento, así como la ley de la gravitación universal. En los dos primeros libros, se estudia el movimiento de los cuerpos en el vacío y en un medio resistente. Newton deduce matemáticamente las tres leyes que Kepler había obtenido empíricamente. En el libro III, titulado *Sobre el Sistema del Mundo*, Newton desarrolla la mecánica celeste. Hace un detallado estudio de los movimientos de la Luna, explicando las causas de las mareas. Calcula la masa del Sol con respecto a la de la Tierra, estudia la precesión de los equinoccios, predice el achatamiento de la Tierra por los polos ....

En los *Principia* el mundo aparece como un sistema ordenado y armonioso en el que todo, los cielos, la tierra y el mar, obedecen unas pocas leyes matemáticas fundamentales. A partir de Newton quedará claro que no hay diferencias entre un mundo sublunar y otro supralunar, ni entre la Tierra y el Cielo; las leyes de la Naturaleza no hacen estas distinciones y en todas partes del Universo los procesos obedecen a las mismas leyes naturales inexorables.

El Universo newtoniano es un Cosmos diáfano y sereno ofrecido a la exploración racional del hombre. La gran obra de Newton proporcionará a la Ilustración, en el siglo XVIII, la base científica necesaria para acabar con una concepción conservadora y absolutista del poder político apoyada en dogmáticas concepciones religiosas.

El prestigio y admiración que gozó Newton en vida queda reflejado en las palabras de Alexander Pope:

> *Nature, and Nature's Laws lay hid in Night:*
> *God said,* Let Newton be – *and All was light.*

Y ¿qué pensaba el propio Newton de sí mismo? Escuchemos sus palabras, ya casi al final de su vida.

> No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero a mí me parece haber sido solamente como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra más pulida o una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí completamente desconocido.

Newton murió en la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

1.5. Leibniz y el cálculo de diferencias

Figura 6. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nació en Leipzig (Alemania) en el seno de una piadosa familia luterana. A los quince años entró en la Universidad de su ciudad natal donde estudió una gran variedad de materias incluyendo derecho, teología, filosofía y matemáticas. Se doctoró a la edad de 21 años en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, donde le fue ofrecido un puesto de profesor que él rechazó.

A lo largo de su vida, Leibniz realizó múltiples actividades. Como abogado y diplomático trabajó para el Príncipe elector arzobispo de Maguncia y, desde 1676 hasta su muerte, para los Duques de Brunswick-Luneburgo (conocidos como príncipes electores de Hanover desde 1692), lo que le llevó a viajar por gran parte de Europa. Inventó una máquina de calcular, la primera máquina de este tipo capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Como ingeniero trabajó en prensas hidráulicas, molinos de viento y desarrolló proyectos para drenar el agua de las minas de plata de las montañas de Harz en la Baja Sajonia. Como historiador escribió la historia de la casa de Brunswick, realizando muchas investigaciones genealógicas. Trabajó también como bibliotecario en la ciudad de Hanover.

Leibniz fue un pensador profundo. Como filósofo se propuso la creación de un álgebra del pensamiento humano, algo así como un lenguaje simbólico universal para escribir los razonamientos con símbolos y fórmulas, cuyas reglas de combinación permitieran reducir todo discurso racional a cálculos rutinarios. Esto explica el gran interés de Leibniz en desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo; de hecho, su notación, muy superior a la de Newton, es la que usamos actualmente. Leibniz fundó la Academia de Ciencias de Berlín en 1700 y fue su primer presidente; también fue uno de los fundadores de la primera revista científica alemana, el *Acta Eruditorum*.

Aunque Leibniz publicó poco, mantuvo correspondencia con más de 600 eruditos y se han conservado sus manuscritos que están en el archivo que lleva su nombre en la ciudad de Hannover. Las contribuciones de Leibniz al álgebra (determinantes, resolución de ecuaciones), la historia natural, la geología y la lingüística son también importantes.

En 1672, estando en París en misión diplomática, Leibniz se dedicó intensamente al estudio de la matemática superior teniendo como guía al matemático y físico Christian Huygens (1629 - 1695). En los años 1673 y 1676 realizó, también en misión diplomática, dos viajes a Londres donde tuvo acceso al manuscrito de Newton *De Analysi*, circunstancia que se usó para acusar, hoy sabemos que sin motivo alguno, a Leibniz de plagio cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del Cálculo. Los progresos matemáticos realizados por Leibniz en estos cuatro años fueron extraordinarios.

En las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$$

Leibniz se había dado cuenta de la relación:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n$$

lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de "diferencial", el cual tuvo para él diferentes significados en distintas épocas.

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva y son algo así como los "vértices" de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la *diferencial* de x y se representa por $\mathrm{d}x$, significado análogo tiene $\mathrm{d}y$. El diferencial $\mathrm{d}x$ es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x, de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por $\mathrm{d}s$. Resulta así el *triángulo característico* de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.

Curiosamente, los términos "abscisa", "ordenada" y "coordenadas", tan propios de la geometría analítica, no fueron usados nunca por Descartes sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de "diferenciales", Leibniz siempre hablaba de "diferencias".

El triángulo característico tiene lados infinitesimales $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}s$ y se verifica la relación $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$. El lado $\mathrm{d}s$ sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó *cociente diferencial*. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

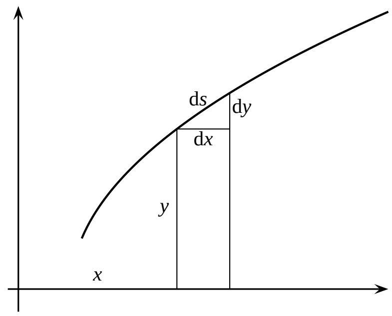

Figura 7. Triángulo característico

Leibniz investigó durante algún tiempo hasta encontrar las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes. Dichas reglas se expresan fácilmente con su notación diferencial:

$$\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

La manera en que Leibniz llegó a estas fórmulas pudo ser como sigue. Consideremos

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Entonces

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1}\sum_{j=1}^{n} x_j \tag{3}$$

Si interpretamos, al estilo de Leibniz, que x_j e y_j son diferencias de valores consecutivos de las cantidades x e y respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrán dados por las sumas respectivas $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$, mientras que $\mathrm{d}x = x_{n+1}$ y $\mathrm{d}y = y_{n+1}$ por ser diferencias de valores consecutivos. De la misma forma, $z_{n+1} - z_n$ sería la diferencial de $z = xy$. Por tanto, la igualdad 3 es interpretada por Leibniz en la forma $\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, lo que lleva a la regla para la diferencial de un producto.

A partir de la regla para la diferencial de un producto, Leibniz obtuvo la regla correspondiente para la diferencial de un cociente $z = \frac{x}{y}$. Poniendo $x = zy$ se tiene que $\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}y$, de donde despejando $\mathrm{d}z$, resulta:

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

Además, dicha notación tiene una gran potencialidad heurística, como ya hemos visto al estudiar la derivada de una función compuesta.

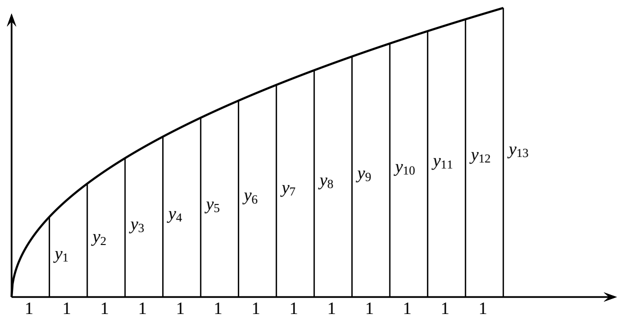

Figura 8. Aproximación de una cuadratura

Consideremos ahora una curva como la de la figura 8 con una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad. La suma de las ordenadas es una aproximación de la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, dedujo Leibniz que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integración y el origen de sus notaciones para la integral y los diferenciales, pueden seguirse con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. Nos ocuparemos de ello en el capítulo dedicado a la integración. En 1676 Leibniz ya había obtenido prácticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicación sobre cálculo diferencial fue el artículo de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus,* que fue publicado en *Acta Eruditorum* hace ya más de tres siglos, en 1684. En este trabajo, Leibniz definía el diferencial $\mathrm{d}y$ de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades infinitesimales. Poco después, en 1686, Leibniz publicó un trabajo con sus estudios sobre la integración.

Reconocido hoy día como un genio universal, Leibniz vivió sus últimos años en Hannover en un aislamiento cada vez mayor y murió el 14 de noviembre de 1716. A su entierro solamente asistió su secretario.

1.6. Desarrollo del cálculo diferencial

Aunque las publicaciones de Leibniz eran breves y difíciles de leer, su cálculo, más sencillo de entender que el de Newton y provisto de una excelente notación, triunfó pronto en el continente europeo logrando grandes éxitos, mientras que en Inglaterra la fidelidad a la teoría de fluxiones y a la notación newtoniana condujo a un cierto aislamiento, agravado por sentimientos nacionales y la disputa sobre la prioridad, y no consiguió éxitos comparables a los del continente.

Los hermanos Jakob y Johann Bernoulli, matemáticos y profesores de la universidad de Basilea, estudiaron los trabajos de Leibniz con quien iniciaron una productiva correspondencia. A partir de 1690 publicaron una serie de trabajos en el *Acta Eruditorum* y en otras revistas, poniendo de manifiesto que el cálculo de Leibniz era una herramienta poderosa con la que había que contar. Para divulgar dicha herramienta era preciso un buen libro de texto que explicara con detalle los pormenores del nuevo cálculo. Dicho libro apareció bien pronto, en 1696, y su autor fue el matemático y noble francés Guillaume François, marqués de L'Hôpital. El título del libro, del que ya hemos dado noticia en anteriores capítulos, era *Analyse des infiniment petits pour líntelligence des lignes courbes*. Hoy sabemos que los resultados originales que aparecen en dicho libro son debidos no a L'Hôpital sino a su profesor Johann Bernoulli.

En su libro, L'Hôpital desarrollaba el cálculo diferencial tal como había sido concebido por Leibniz, es decir, usando cantidades infinitesimales para las que se establecían ciertas reglas de cálculo. La definición de diferencial es como sigue: *"La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad"*. Para trabajar con infinitésimos se establece la siguiente regla: *"Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra"*.

Los escritos de los Bernoulli, Leibniz y L'Hôpital popularizaron el cálculo leibniziano y ya en la primera década del siglo XVIII otros matemáticos se interesaron por él. La potencialidad del concepto de derivada se puso de manifiesto en las aplicaciones del cálculo a la física newtoniana.

Para no hacer excesivamente larga esta exposición, voy a resumir muy esquemáticamente los puntos clave en el desarrollo del cálculo diferencial.

- El descubrimiento en 1715 por Brook Taylor de las llamadas series de Taylor, que se convirtieron en una herramienta básica para el desarrollo del cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales.
- El extraordinario trabajo, tanto por su asombrosa amplitud como por sus notables descubrimientos, de Leonhard Euler (1707 - 1783) que, sin duda, es la figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. En sus tres grandes tratados, escritos en latín, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentiales* (1755) e *Institutiones calculi*

integralis (1768), Euler dio al cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables o, más exactamente, de cantidades geométricas variables, y de ecuaciones, se fue transformando, por influencia de Euler, en un cálculo de funciones.

- La propuesta de Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) de fundamentar el cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no era acertada, su propuesta, concretada en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones más tradicionales. De hecho, la terminología "función derivada", así como la notación $f'(x)$ para representar la derivada de una función f, fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de este momento la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa (fluxión o cociente diferencial) y empieza a ser considerada simplemente como una función.
- Los problemas planteados por las series de Fourier. Dichas series hacen sus primeras apariciones a mitad del siglo XVIII en relación con el problema de la cuerda vibrante, y nacen oficialmente en el trabajo de Joseph Fourier (1768 - 1830) *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Tales series plantean problemas relacionados con las ideas centrales del análisis: el concepto de función, el significado de la integral y los procesos de convergencia.
- El proceso de "algebraización del análisis" que tiene lugar en los dos últimos tercios del siglo XIX y que culmina con la fundamentación del análisis sobre el concepto de límite (Bolzano, Cauchy, Weierstrass) y la teoría de los números reales (Dedekind, Cantor). Lo esencial de este proceso ya ha sido considerado en el tema anterior.

Referencias

[1] Kirsti Andersen. Las Técnicas del Cálculo, 1630-1660. En *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial, S.A., 1984. 3

[2] Judith V. Grabiner. The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56:195 – 206, 1983. 3

[3] González Urbaneja, P.M. *Las Técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval*. https://fundacionorotava.org/media/web/publication_files/publication23__a2_c016w.pdf. 3

[4] Israel Kleiner. History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48:137 – 174, 2001. 3